初中数学解题方法的探索与实践

——旋转与全等

冯涛
安阳市曙光学校

一、从一对等边三角形的旋转谈起

【问题呈现】如图，△*ABC*与△*ADE*都是等边三角形，且*BD*与*CE*相交于点*F*.

求证：(1) *BD*=*CE*；(2)∠*BFC*=60°.

证明：(1)∵ △*ABC*是等边三角形，

∴*AB*=*AC*，∠1=60°.

同理，*AD*=*AE*，∠2=60°.

∴∠1+∠3= ∠2+∠3.

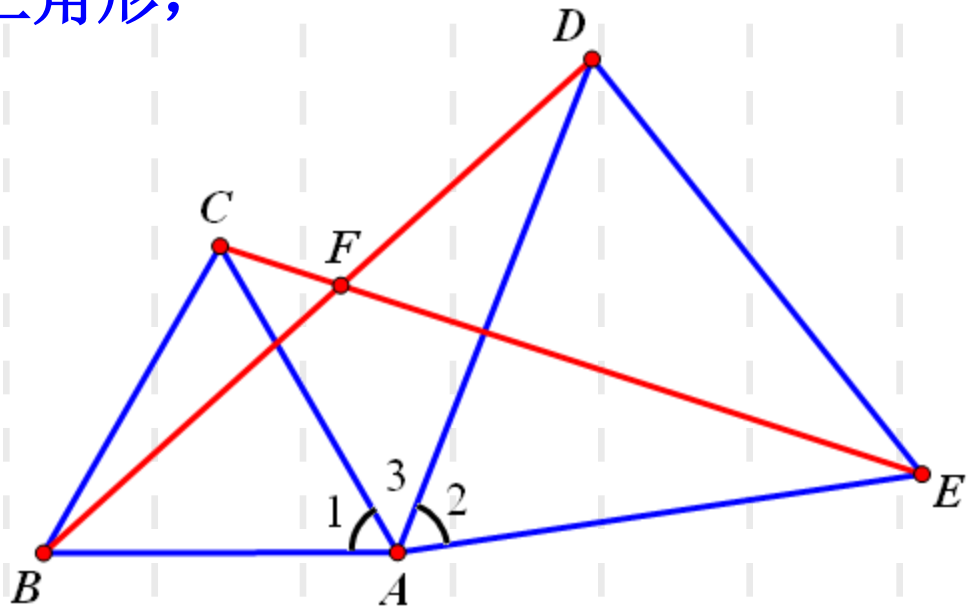
即∠*BAD*= ∠*CAE*.

在△*ABD*和△*ACE*中

$$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE. \end{cases}$$

∴ △*ABD*≌△*ACE*（SAS）.

∴ *BD*=*CE*.



一、从一对等边三角形的旋转谈起

【问题呈现】如图，△*ABC*与△*ADE*都是等边三角形，且*BD*与*CE*相交于点*F*.

求证：(1) *BD*=*CE*；(2)∠*BFC*=60°.

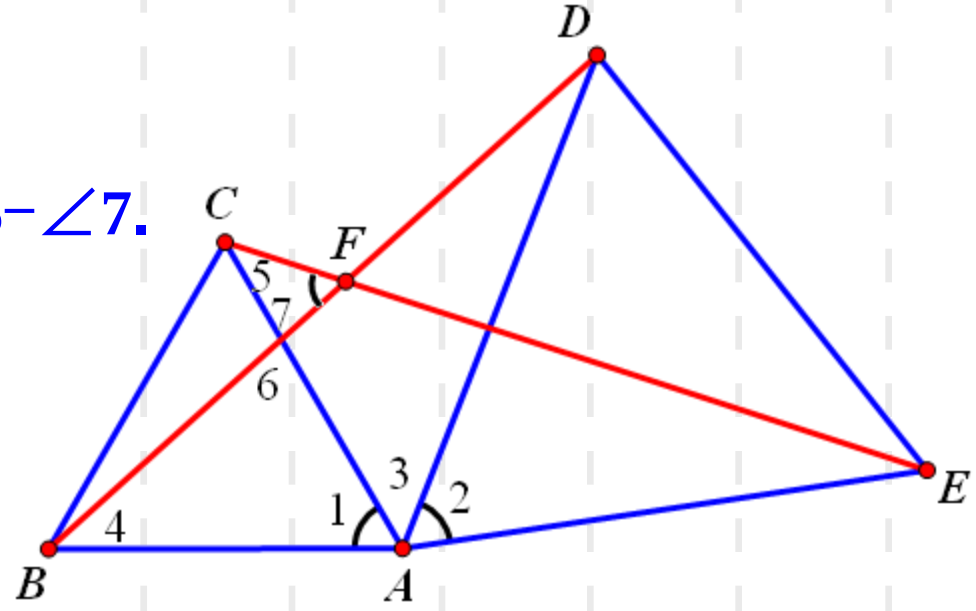
证明：(2)∵ △*ABD*≌△*ACE*，

∴∠4=∠5.

又∵∠6=∠7，

∴180°−∠4−∠6= 180°−∠5−∠7.

即∠*BFC*= ∠1=60°.



二、这个结论对于等腰三角形成立吗？

【变式】如图，△*ABC*与△*ADE*中，*AB*=*AC*，*AD*=*AE*，∠1=∠2，*BD*与*CE*相交于点*F*.

求证：(1) *BD*=*CE*；(2)∠*BFC*=∠1.

证明：（1）∵ ∠1= ∠ 2，

∴∠1+∠3= ∠2+∠3.

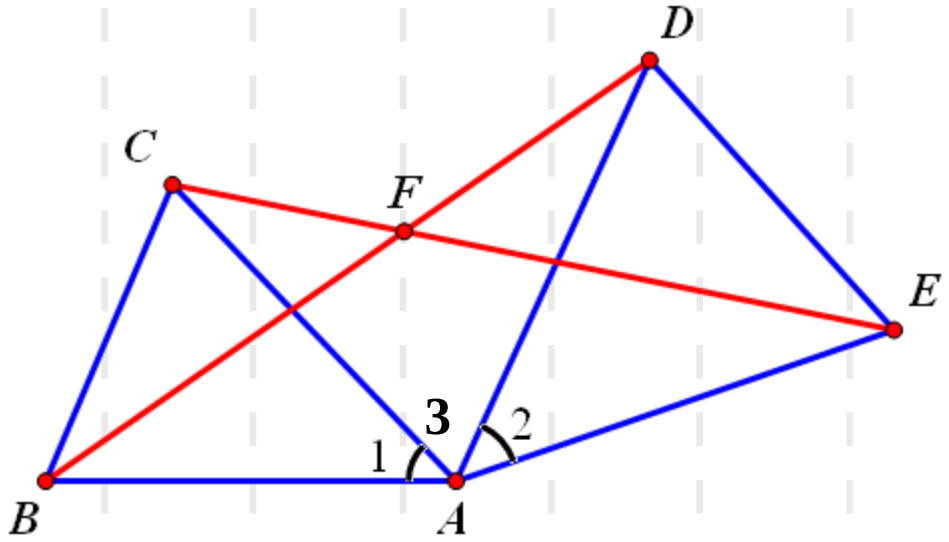
即∠*BAD*= ∠*CAE*.

在△*ABD*和△*ACE*中

$$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE. \end{cases}$$

∴ △*ABD*≌△*ACE*（SAS）.

∴ *BD*=*CE*.



二、这个结论对于等腰三角形成立吗？

【变式】如图，△*ABC*与△*ADE*中，*AB*=*AC*，*AD*=*AE*，∠1=∠2，*BD*与*CE*相交于点*F*.

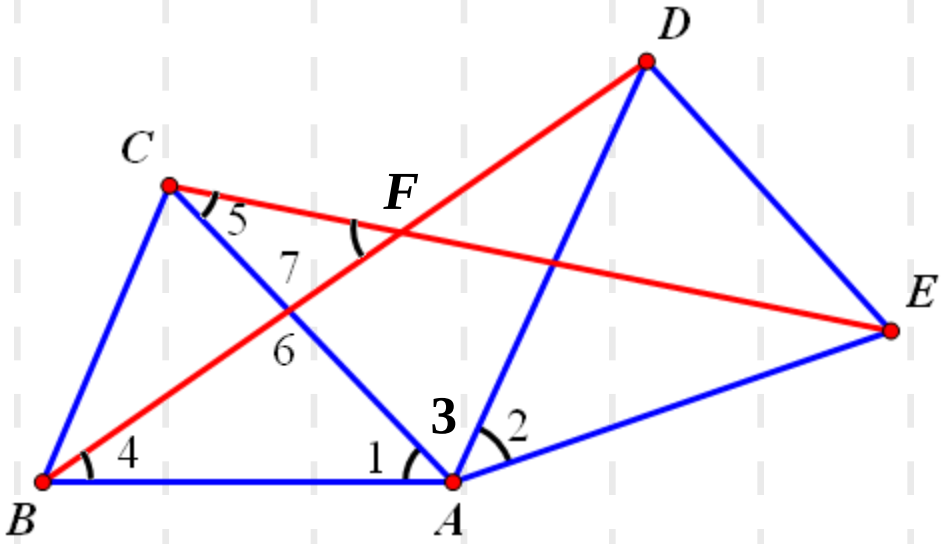
求证：(1) *BD*=*CE*；(2)∠*BFC*=∠1.

(2)∵ △*ABD*≌△*ACE* ，

∴∠4=∠5.

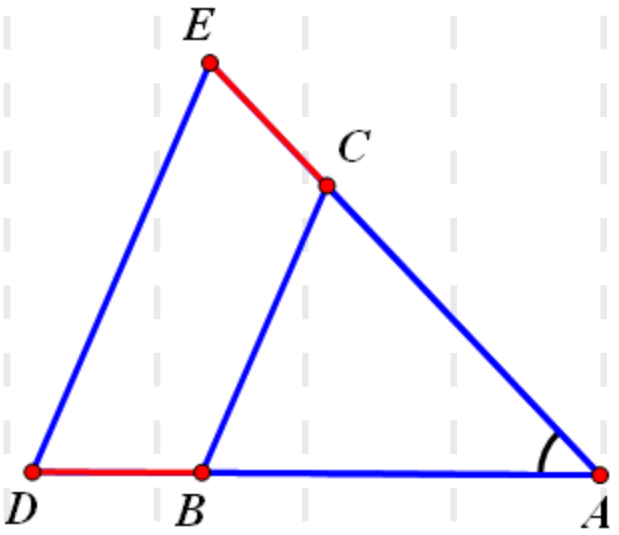
又∵∠6=∠7.

∴∠*BFC*= ∠1.



三、一起揭示问题的本质

【问题1】如图，△*ABC*与△*ADE*中，*AB*=*AC*，*AD*=*AE*，∠*A*是公共角. (1)求证： *BD*=*CE*；(2) *BD*与*CE*的夹角是哪个角？



分析：（1）∵*AB*=*AC*，*AD*=*AE*，

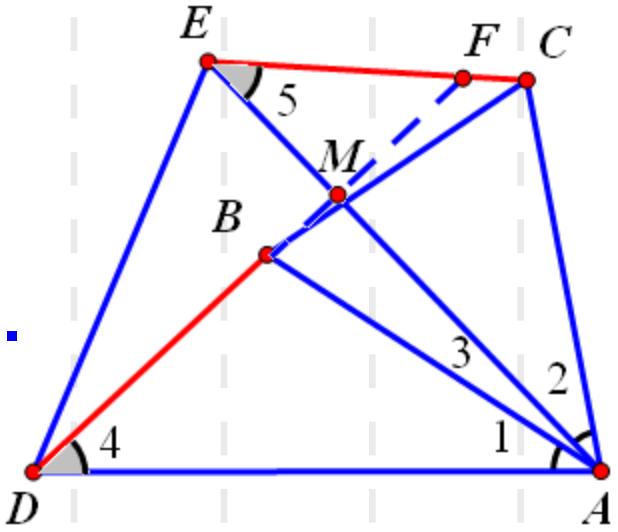
∴ *AD*−*AB*= *AE*−*AC* .

即*BD*=*CE*.

（2）*BD*与*CE*的夹角显然是∠*A*.

三、一起揭示问题的本质

【问题2】如图，△*ABC*与△*ADE*都是等腰三角形，*AB*=*AC*，*AD*=*AE*，且它们的顶角相等. (1)求证： *BD*=*CE*；(2) *BD*与*CE*所在直线的夹角与哪个角的度数相等？



分析：(1)∵ ∠*DAE*=∠*BAC*.

∴ ∠*DAE*−∠3= ∠*BAC*− ∠3.

即 ∠1= ∠2 .

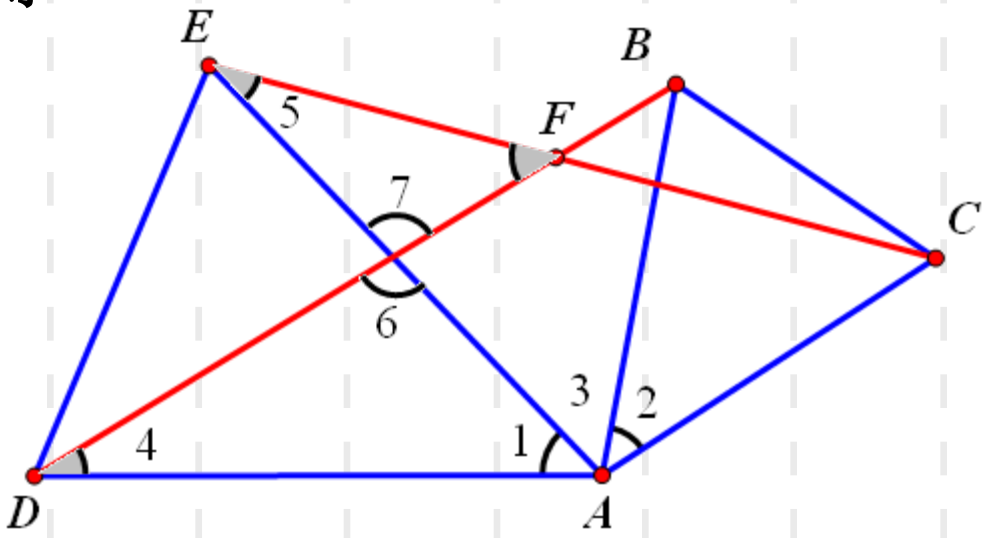
应用SAS可以证得△*ABD*≌△*ACE* .

∴ *BD*=*CE*.

（2）根据“8”字型，可得*BD*与*CE*的夹角与∠*DAE*的度数相等.

三、一起揭示问题的本质

【问题3】如图，△*ABC*与△*ADE*都是等腰三角形，*AB*=*AC*，*AD*=*AE*，且它们的顶角相等.求证：(1) *BD*=*CE*；(2) *BD*与*CE*的夹角与哪个角的度数相等？



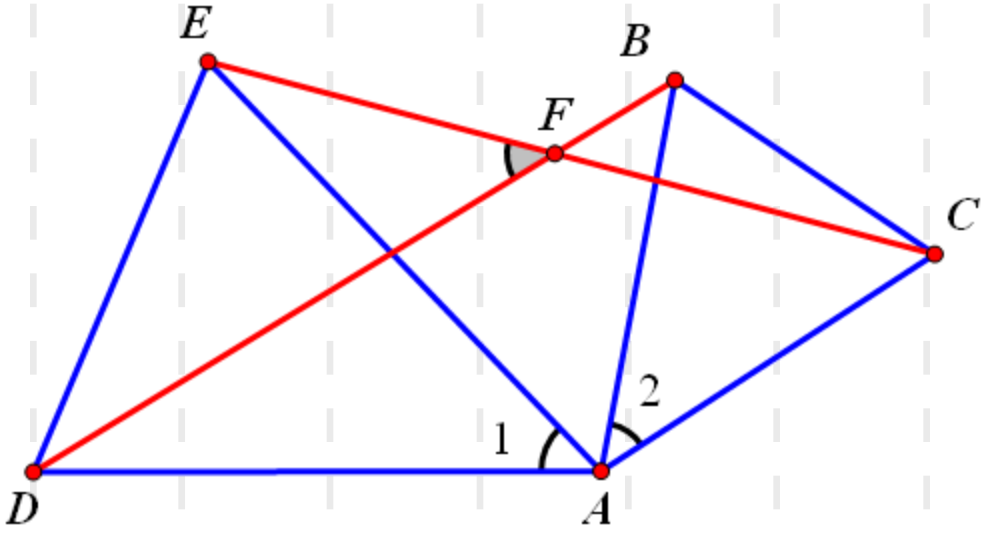
分析：(1)∵ ∠1=∠2.
∴ ∠1+∠3= ∠2+ ∠3.
∴ ∠*DAB*= ∠*EAC* .
应用SAS可以证得
△*ABD*≌△*ACE* .
∴ *BD*=*CE*.

（2）根据“8”字型，可得*BD*与*CE*的夹角显然与∠*DAE*的度数相等.

三、一起揭示问题的本质

旋转与全等的约定

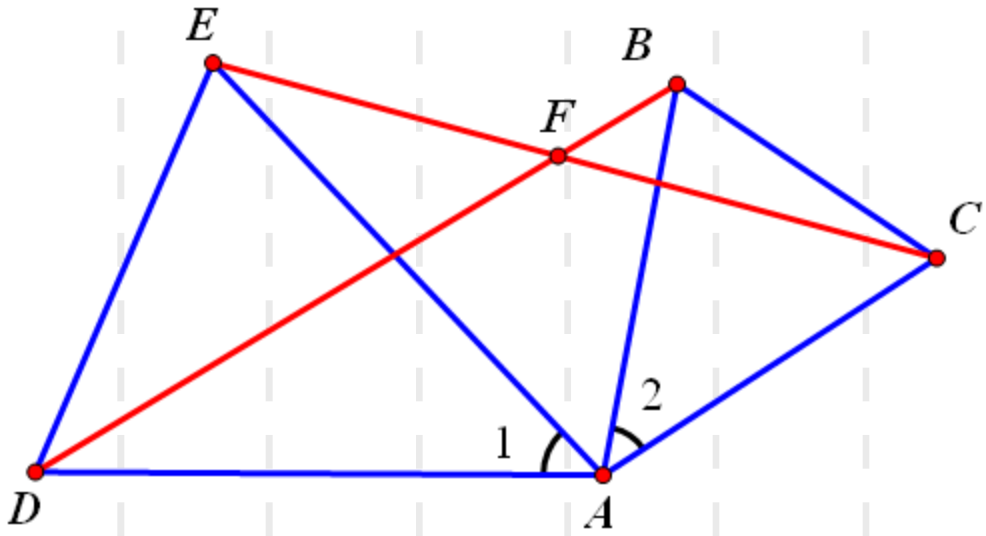
我们本来是一对等腰三角形，
顶角相等，
顶点重合。
当一个三角形，
绕着共有的顶点，
开始旋转的旅行，



对应点的连线也有了新的行程。
但我们保持最初的约定：
长度相等，夹角永恒。

四、约定下的再探究

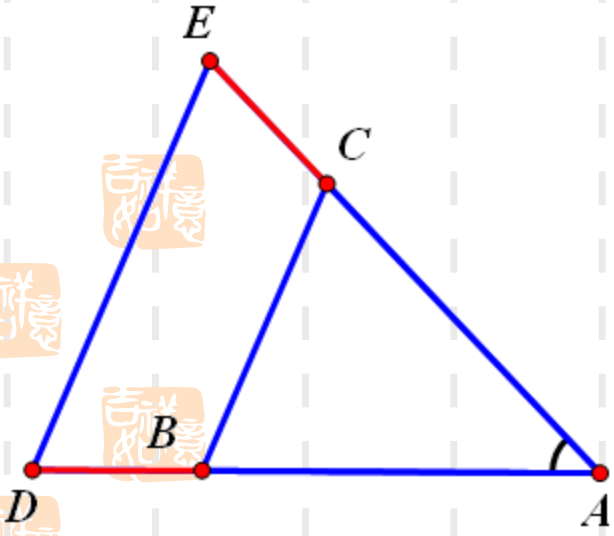
【探究1】如图，△*ABC*与△*ADE*都是等腰三角形，*AB*=*AC*=6，*AD*=*AE*=10，且它们的顶角相等.当△*ABC*绕着点*A*旋转，线段*BD*的长的取值范围是什么？



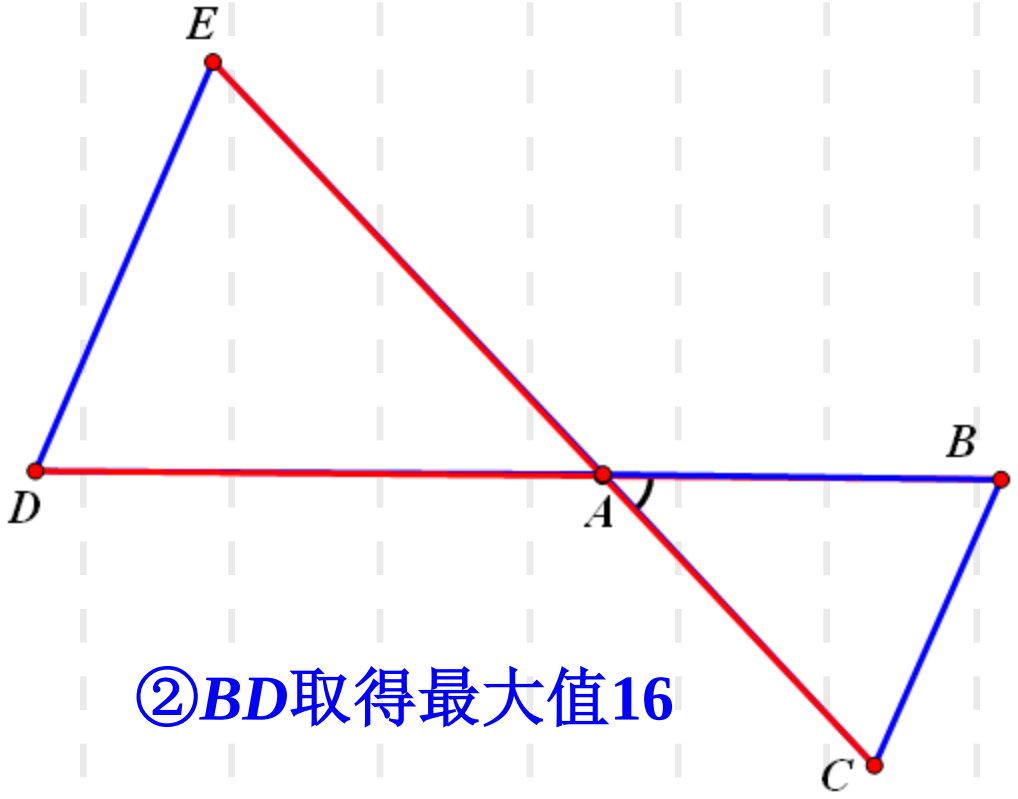
几何画板演示

四、约定下的再探究

【探究1】如图，△*ABC*与△*ADE*都是等腰三角形，*AB*=*AC*=6，*AD*=*AE*=10，且它们的顶角相等.当△*ABC*绕着点*A*旋转，线段*BD*的长的取值范围是什么？



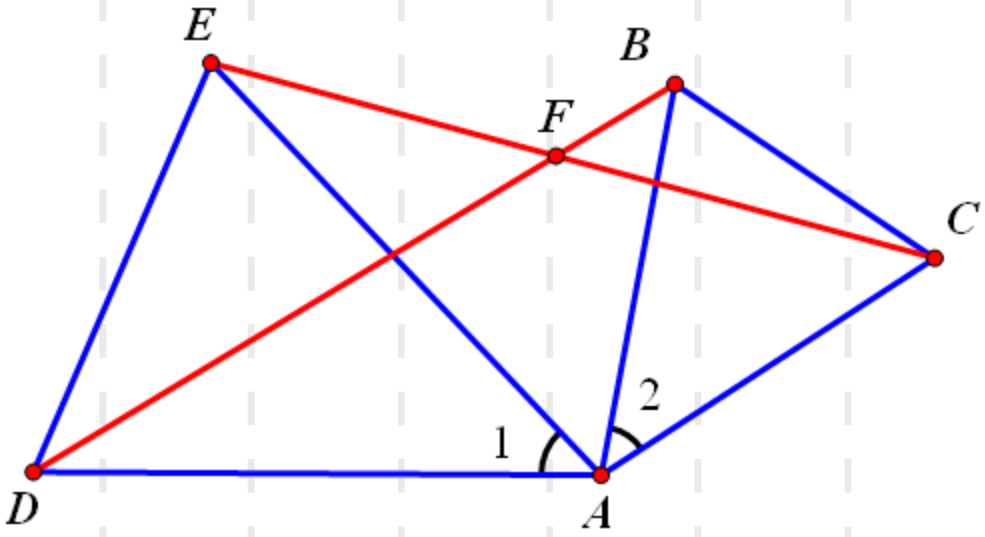
①*BD*取得最小值4



②*BD*取得最大值16

四、约定下的再探究

【探究1】如图，△*ABC*与△*ADE*都是等腰三角形，*AB*=*AC*=6，*AD*=*AE*=10，且它们的顶角相等.当△*ABC*绕着点*A*旋转，线段*BD*的长的取值范围是什么？



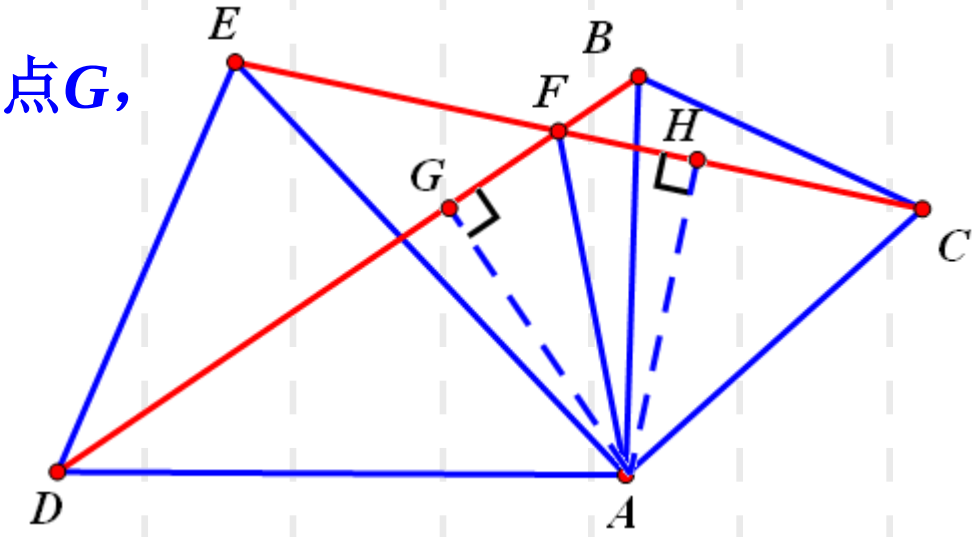
$4 \leqslant BD \leqslant 16$

两腰之差≤*BD*≤两腰之和

四、约定下的再探究

【探究2】如图，等腰△*ABC*和△*ADE*中，*AB*=*AC*，*AD*=*AE*，且它们的顶角相等，*BD*与*CE*相交于点*F*，连接*FA*.

求证： *FA*平分∠*DFC*.



【分析】过点*A*作*AG*⊥*BD*于点*G*，作*AH*⊥*CE*于点*H*.

∵ △*ABD*≌△*ACE* ，

∵ $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACE}$.

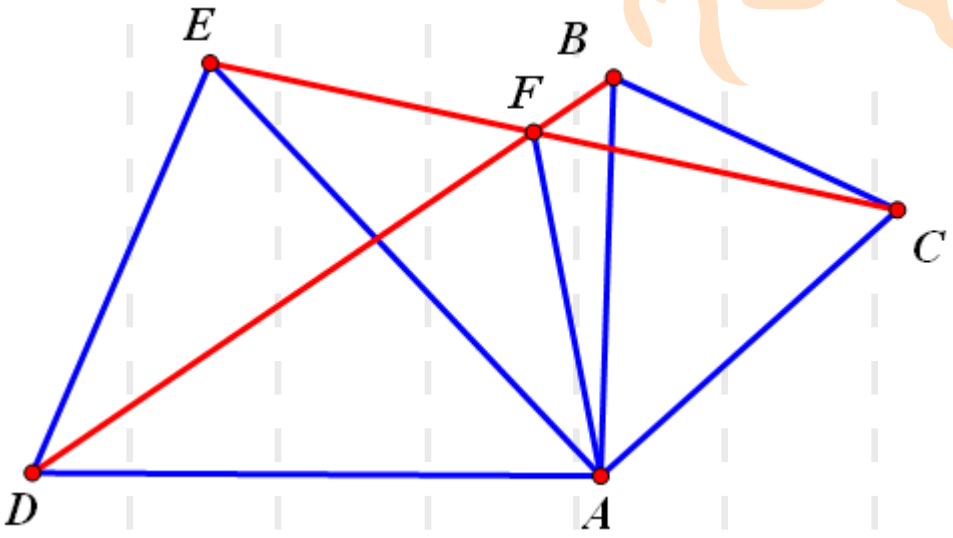
又∵*BD*=*CE*，

∴ *AG* = *AH* .

∴*FA*平分∠*DFC*.

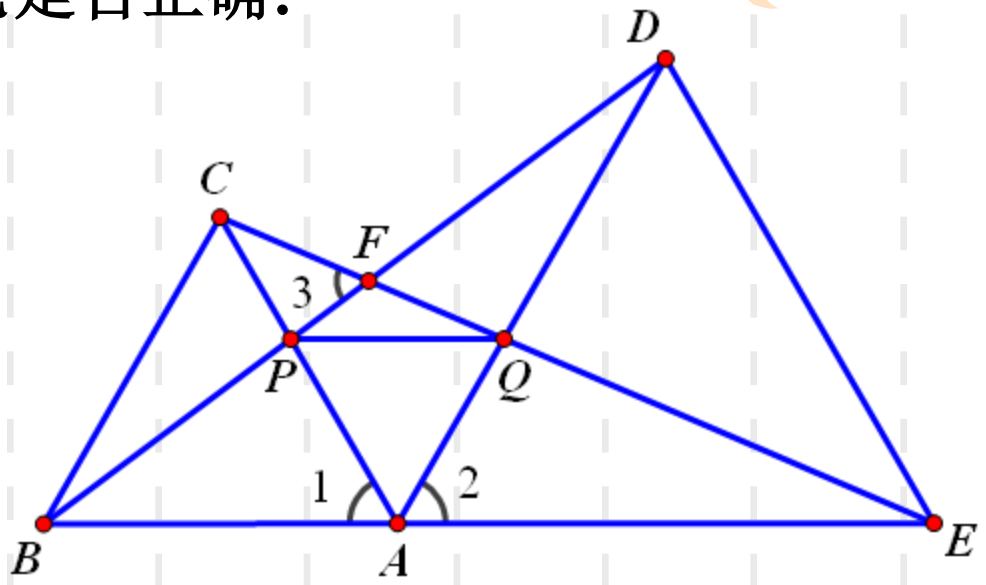
旋转与全等的约定

我们本来是一对等腰三角形，
顶角相等，
顶点重合。
当一个三角形，
绕着共有的顶点，
开始旋转的旅行，
对应点的连线也有了新的行程。
但我们保持最初的约定：
长度相等，夹角永恒。
和是最大，差最小。
连接交点和中心就是一条角平分。



五、应用约定解决几个典型问题

【问题1】如图，△*ABC*与△*ADE*都是等边三角形，且*A*、*B*、*E*三点共线，判断下列结论是否正确：



① △*BAD*≌△*CAE*；

②*BD*=*CE*；

③∠3=60°；

④ *BP*=*CQ*；

⑤ *DP*=*EQ*；

⑥ △*APQ*是等边三角形；

⑦*PQ*∥*BE*；

⑧*DE*>*DP*.

当*A*、*B*、*E*三点不共线时， △*APQ*不是等边三角形.

五、应用约定解决几个典型问题

【问题2】如图所示，△*ABC*与△*ADE*都是等边三角形，*CF*是高，点*E*在*CF*上，连接*DF*．若*BC*=4，当点*E*在*CF*上运动时，线段*DF*的最小值是多少？

【分析】连接*BD*.

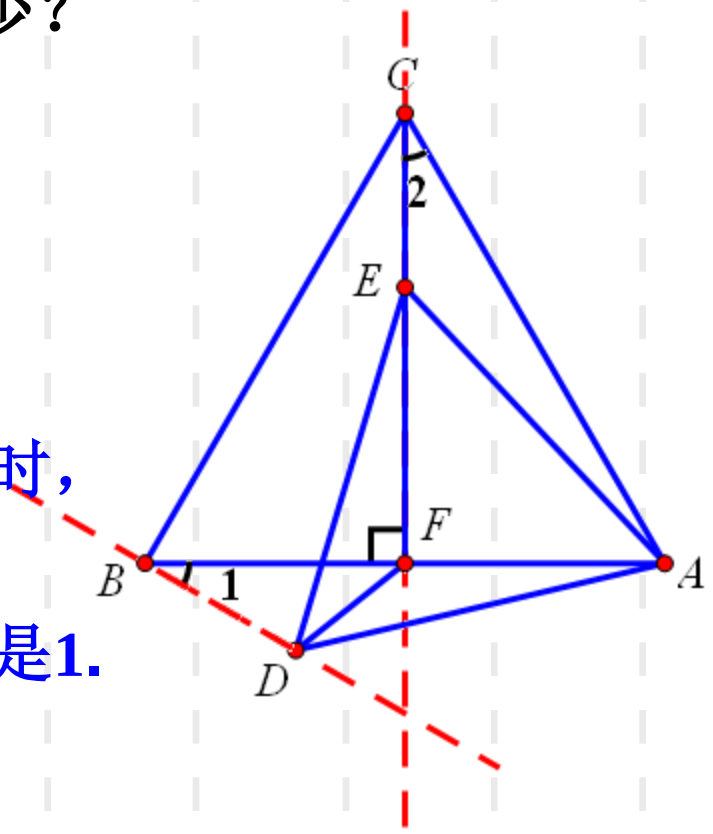
可证△*ABD*≌△*ACE*，得

∠1=∠2=30°．

∴∠*DBC*=90°．

由垂线段最短可得，当*DF*⊥*BD*时，*DF*取得最小值.

由*BC*=4，可以求出*DF*的最小值是1.



五、应用约定解决几个典型问题

【问题3】如图所示， △*ABC*与△*ADE*都是等边三角形，点*D*在*BC*上，连接*CE*. 求证：*CE* // *BA*.

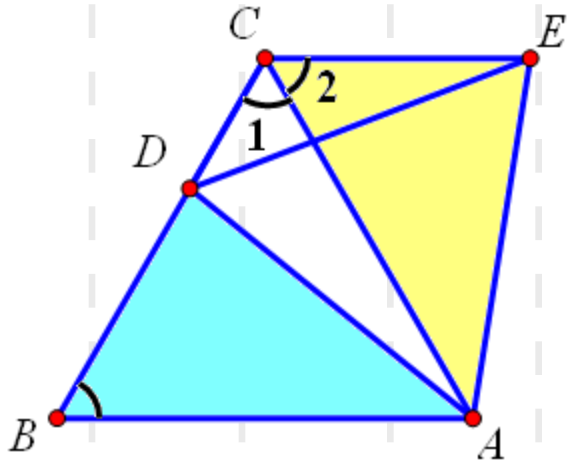
【分析】先证△*ABD*≌△*ACE*，得

∠*B*=∠2=60°.

∵ ∠1=60°，

∴ ∠*B*+∠*BCE* =180°.

∴*CE* // *BA*时.



∠*ABD*= ∠*ACE* =60°.

五、应用约定解决几个典型问题

【问题3变式①】如图所示，△*ABC*与△*ADE*都是等边三角形，点*D*在*BC*延长线上，连接*CE*. 求证：*CE* // *BA*.

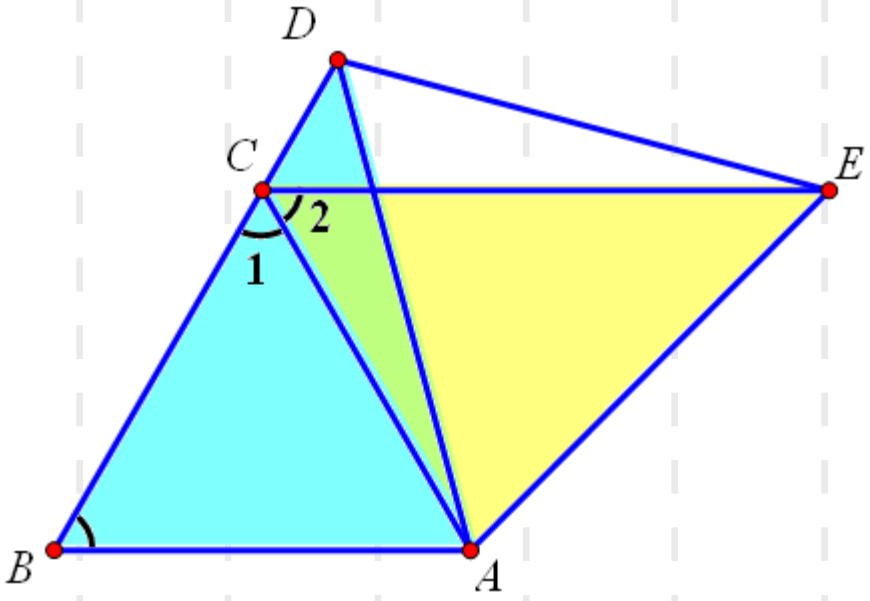
【分析】先证△*ABD*≌△*ACE*，得

∠*B*=∠2=60°.

∵ ∠1=60°，

∴ ∠*B*+∠*BCE* =180°.

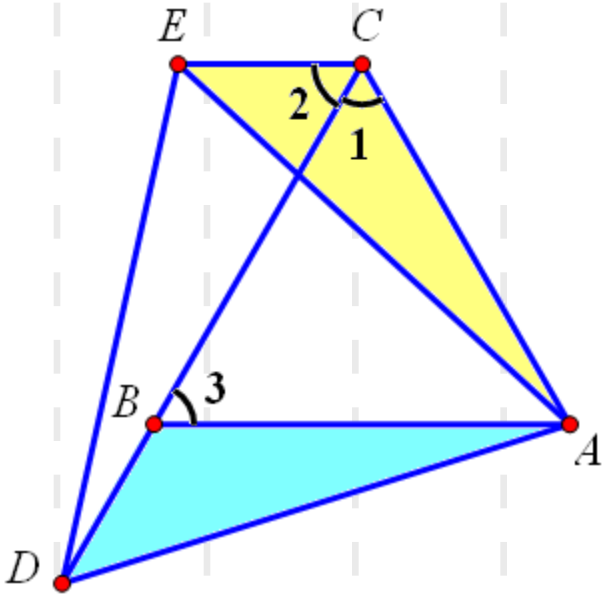
∴*CE* // *BA*时.



∠*ABD*= ∠*ACE* =60°.

五、应用约定解决几个典型问题

【问题3变式②】如图所示， △*ABC*与△*ADE*都是等边三角形，点*D*在*CB*延长线上，连接*CE*. 求证：*CE* // *BA*.



【分析】先证△*ABD*≌△*ACE*，得

∠*ABD*=∠*ACE*=120°.

∴ ∠1 +∠2 =120°

∵ ∠1=60°，

∴∠2 =60°.

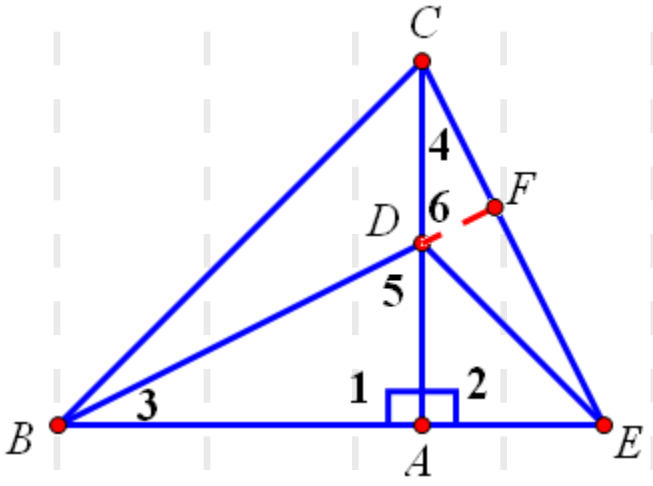
∴ ∠2 = ∠3 =60°.

∴*CE* // *BA*时.

∠*ABD*= ∠*ACE* =120°.

五、应用约定解决几个典型问题

【问题4】如图，△*ABC*与△*ADE*都是等腰直角三角形，且点*D*在*AC*上，∠*DAB*= ∠*EAC* =90°. (1)求证：*BD*=*CE*；(2) *BD*与*CE*所在直线垂直吗？为什么？



分析：（1）△*ABD*≌△*ACE*（SAS）

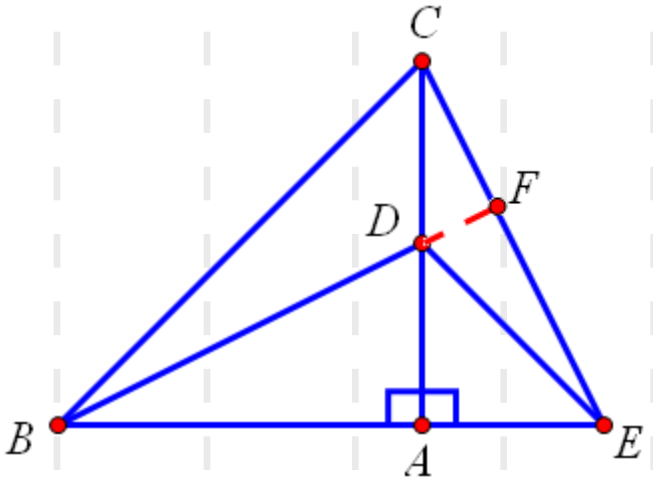
（2）根据“8”字型，可得

∠*CFD*=∠1 =90°.

∴ *BD*⊥*CE*.

五、应用约定解决几个典型问题

【问题4的追问】如图，△*ABC*与△*ADE*都是等腰直角三角形，且点*D*在*AC*上，∠*DAB*= ∠*EAC* =90°. (3)若 *BD*平分∠*CBA*，那么*BC*与*BE*相等吗？为什么？



分析：由（2）可知 *BD*⊥*CE*.

∵ *BD*平分∠*CBA*，

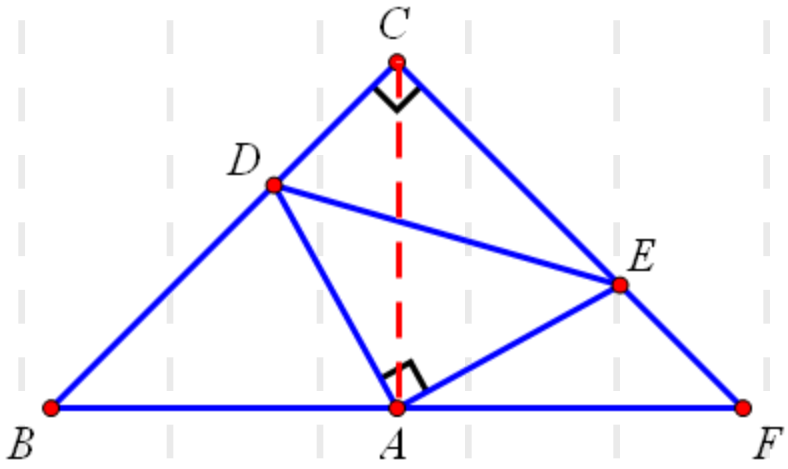
∴可以应用ASA证明

△*BCF*≌△*BEF*.

∴*BC*=*BE*.

五、应用约定解决几个典型问题

【问题5】如图，△*CBF*是等腰直角三角形，点*A*是*BF*的中点，点*D*在*BC*上，点*E*在*FC*上，且 ∠*DAE*= 90°．△*ADE*是等腰直角三角形吗？为什么？



分析：连接*AC*.

显然△*ABC*和△*ACF*都是等腰直角三角形.

可以应用ASA证明

△*ABD*≌△*ACE*或者

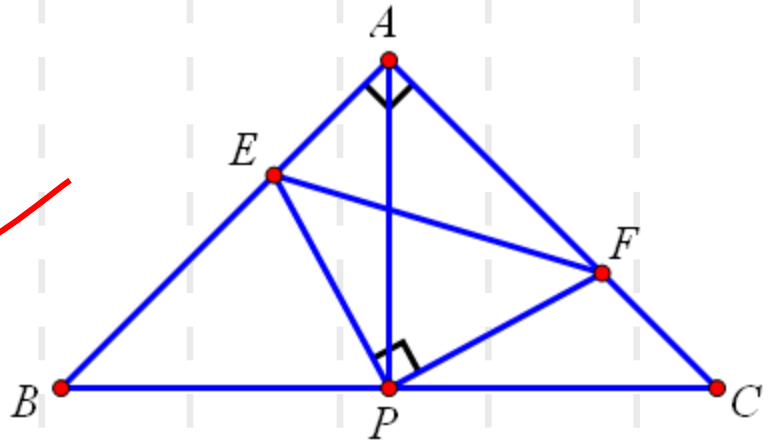
△*ADC*≌△*AEF*.

∴*AD*=*AE*.

∴△*ADE*是等腰直角三角形.

五、应用约定解决几个典型问题

【问题5变式】如图，△*ABC*中，*AB*=*AC*，∠*BAC*=90°，直角∠*EPF*的顶点是*BC*的中点，两边*PE*、*PF*分别交*AB*、*AC*于*E*、*F*. 当∠*EPF*在△*ABC*内绕顶点*P*旋转时（点*E*不与*A*、*B*重合)，下列说法是否正确？



①*AE*=*CF*；

②△*PEF*是等腰直角三角形；

③$S_{\triangle ABC}=2S_{四边形AEPF}$；

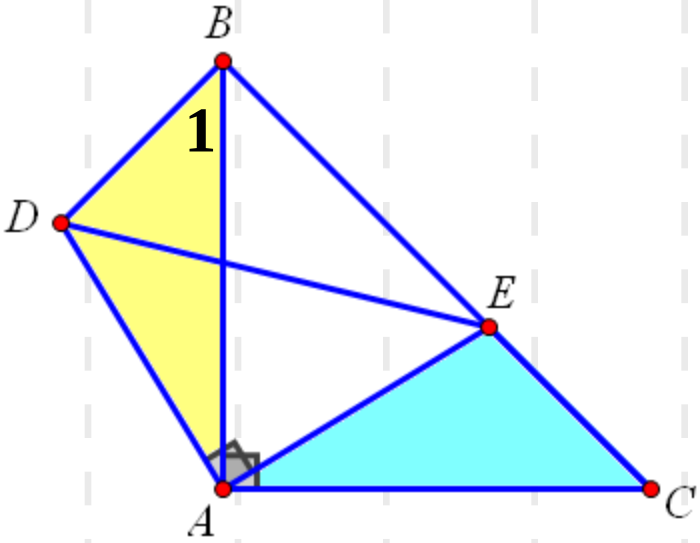
④*EF*=*AP*.

AP≤*EF*≤*AC*

五、应用约定解决几个典型问题

【问题6】如图，△*ABC*与△*ADE*都是等腰直角三角形，且点*E*在*BC*上，∠*BAC*= ∠*DAE* =90°. 求证：*BD*⊥*BC*.

∠*ABD*= ∠*ACE* =45°.

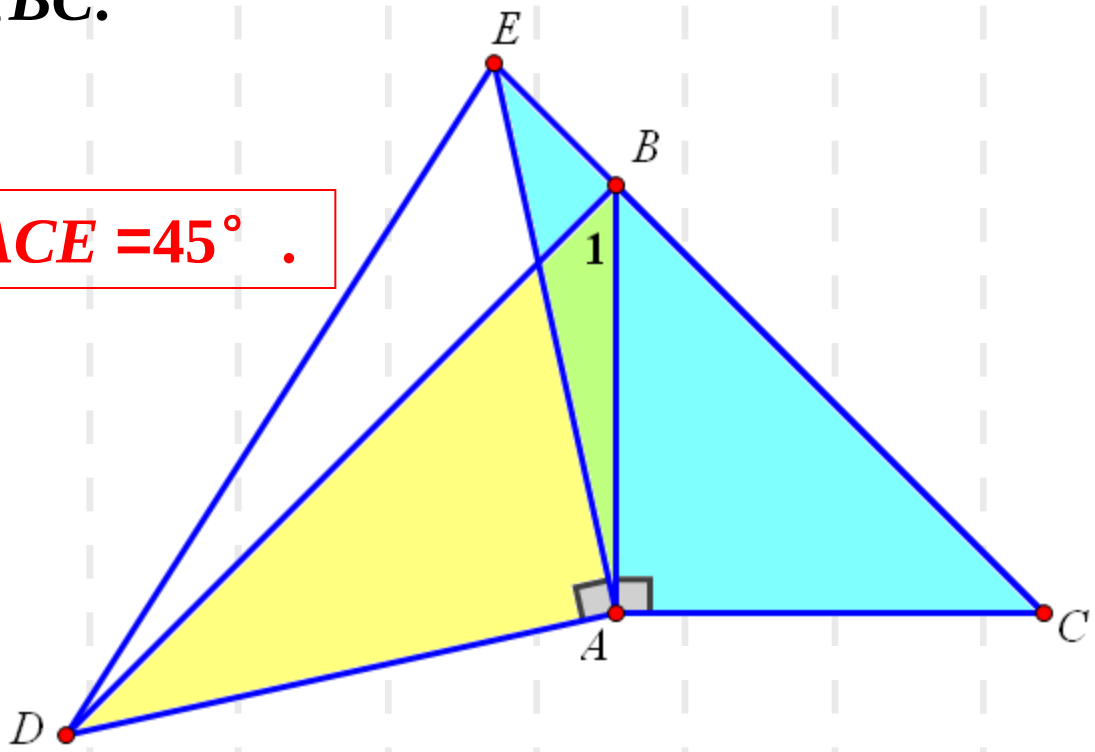


五、应用约定解决几个典型问题

【问题6变式①】如图，△*ABC*与△*ADE*都是等腰直角三角形，且点*E*在*CB*延长线上，∠*BAC*= ∠*DAE* =90°.

求证：*BD*⊥*BC*.

∠*ABD*= ∠*ACE* =45°.

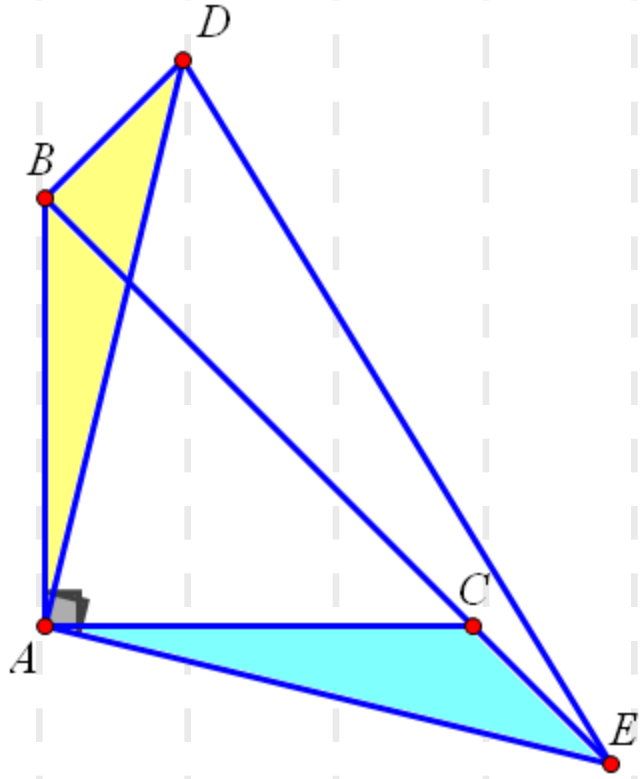


五、应用约定解决几个典型问题

【问题6变式②】如图，△*ABC*与△*ADE*都是等腰直角三角形，且点*E*在*BC*延长线上，∠*BAC*= ∠*DAE* =90°.

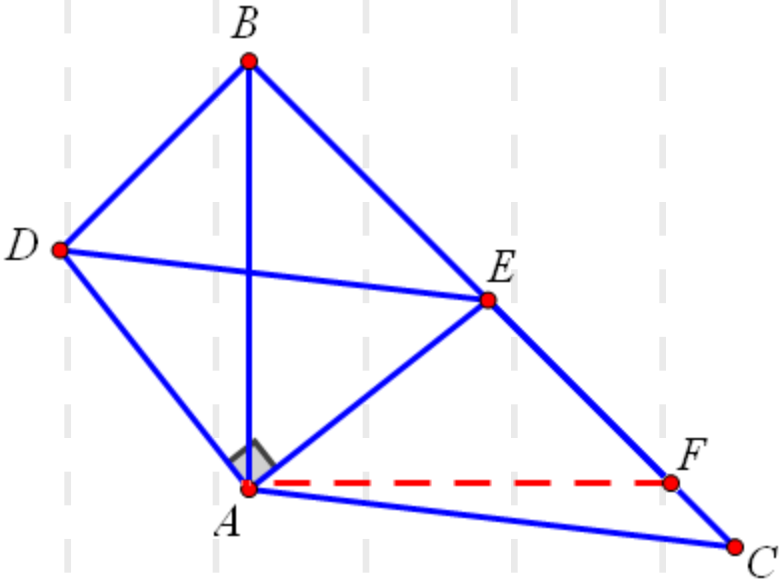
求证：*BD*⊥*BC*.

∠*ABD*= ∠*AC E*=135°.



五、应用约定解决几个典型问题

【问题6变式③】如图所示，△*ABC*是钝角三角形，△*ADE*是等腰直角三角形，∠*DAE* =90°，∠*ABC* =45°，且点*E*在*BC*上. 求证：*BD*⊥*BC*.

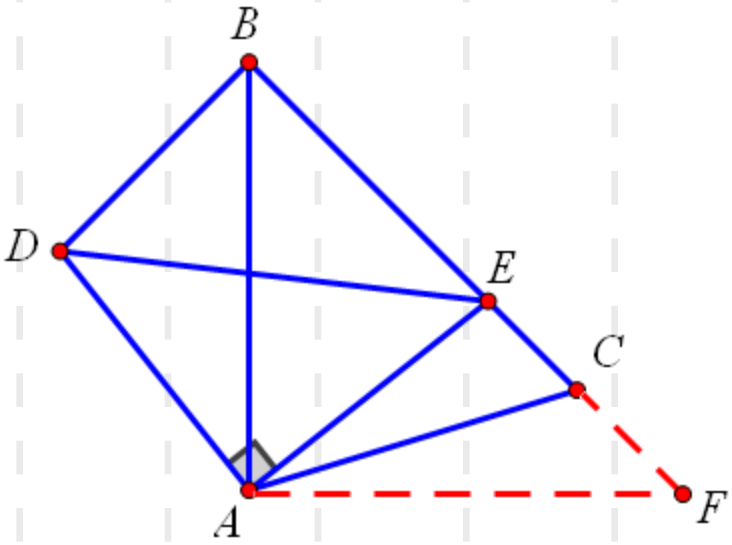


【分析】过点*A*作*AF*⊥*AB*，交*BC*于点*F*.

五、应用约定解决几个典型问题

【问题6变式④】如图所示，△*ABC*是锐角三角形，△*ADE*是等腰直角三角形，∠*DAE* =90°，∠*ABC* =45°，且点*E*在*BC*上. 求证：*BD*⊥*BC*.

【分析】过点*A*作*AF*⊥*AB*，交*BC*的延长线于点*F*.



谢谢！